

BỘ GIÁO DỤC
VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

HỌC VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ



Nguyễn Phương Đông

NGHIÊN CỨU MỘT SỐ MÔ HÌNH TRUYỀN NHIỆM
PHÂN THỨ MỜ VÀ ỨNG DỤNG TRONG MẠNG
CẢM BIẾN KHÔNG DÂY

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN ỨNG DỤNG

Hà Nội - Năm 2023

Công trình được hoàn thành tại: Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Tập thể hướng dẫn khoa học:

Người hướng dẫn 1: PGS. TS. Hoàng Việt Long, Khoa Công nghệ Thông tin, Trường Đại học Kỹ thuật Hậu cần-Công an nhân dân

Người hướng dẫn 2: PGS. TS. Nguyễn Long Giang, Viện Công nghệ Thông tin, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Phản biện 1: PGS. TS. Nguyễn Ngọc Anh

Phản biện 2: PGS. TS. Lê Hoàng Sơn

Phản biện 3: PGS. TS. Vũ Trọng Lương

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án tiến sĩ cấp Học viện, họp tại Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam vào hồi giờ ngày tháng năm 2023.

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Học viện Khoa học và Công nghệ
- Thư viện Quốc gia Việt Nam

MỞ ĐẦU

1. Đặt vấn đề

Với mục tiêu nắm được đặc trưng và dự báo được sự lan truyền của mã độc trên các hệ thống mạng và lấy cảm hứng từ sự tương đồng với sự lây nhiễm các loại bệnh dịch trong quần thể sinh học, hướng nghiên cứu sử dụng mô hình phương trình vi phân để mô hình hóa và phân tích sự lan truyền của các loại mã độc trên mạng hiện đang nhận được nhiều sự quan tâm nghiên cứu. Thực tế rằng các quá trình truyền dẫn tín hiệu trên mạng luôn có sự phụ thuộc đáng kể vào đặc tính của môi trường, kết cấu, tính chất của vật liệu dẫn. Thêm vào đó, cơ chế lan truyền của các phần mềm độc hại là lợi dụng việc truyền dẫn tín hiệu giữa các nút mạng để nhân bản, phát tán và gây ra sự lan truyền mã độc trên mạng. Trong suốt lịch sử phát triển của mình, giải tích phân thứ và các hệ động lực mô tả bởi phương trình vi phân phân thứ đã được chứng minh có khả năng mô hình hóa và khớp dữ liệu tốt hơn so với các mô hình bậc nguyên, tham khảo V.D. Djordjević và cộng sự (2003), M. Di Paola và cộng sự (2011), N.H. Can và cộng sự (2020). Do đó, có khá nhiều nghiên cứu gần đây đã ứng dụng các hệ động lực phân thứ để thiết lập các mô hình lan truyền mã độc và dự báo sự lan truyền mã độc trên các hệ thống mạng như J. Huo và H. Zhao (2016), J. Singh và cộng sự (2018), J.R. Graef và cộng sự (2020), Y. Chen và cộng sự (2021), X. Fu và J. Wang (2022).

Các hệ thống điều tiết giao thông, giám sát môi trường và sinh thái, các hệ thống thông tin hoặc mạng lưới sinh học, v.v. . . . thường được mô tả tốt hơn bởi các mô hình mạng phức hợp không đồng nhất. Gần đây, nhiều nhà nghiên cứu đã sử dụng mô hình toán học dựa trên cấu trúc mạng phức hợp như một công cụ hữu hiệu để nghiên cứu cơ chế phát sinh lan truyền phần mềm độc hại trên mạng, dự báo diễn biến và mức độ ảnh hưởng của các phần mềm độc hại đó đối với các hệ thống mạng. Trong các mô hình cổ điển mô tả sự lan truyền mã độc trên các hệ thống mạng, các tác giả thường bỏ qua yếu tố về quy mô của mạng và giả sử các nút trong mạng được phân bố đều và do đó, tỷ lệ lan truyền mã độc do tiếp xúc luôn giả sử như nhau với mọi nút trong mạng, tức là vai trò của các nút trong mạng là tương đồng. Giả sử này giúp cho việc nghiên cứu trở nên đơn giản và dễ xử lý hơn nhưng điều đó là không hợp lý khi mà trong thực tế, nhiều loại mạng phức hợp như Internet, các mạng xã hội Facebook, Instagram, mạng cảm biến và mạng lưới sinh học, v.v., luôn có số lượng nút rất lớn và khả năng tương tác của các nút khác nhau trong mạng hiển nhiên là không giống nhau. Vì vậy, để có những mô tả và đánh giá thực tế hơn, chúng ta cần xét đến tính không đồng nhất về tiếp xúc của các mạng phức hợp khi thiết lập các mô hình lan truyền mã độc trên mạng. Nghiên cứu của R. Pastor-Satorras và A. Vespignani (2001) được biết đến như một công trình tiên phong cho nghiên cứu các mô hình hóa toán học cho sự lan truyền mã độc trên mạng phức hợp không đồng nhất. Cụ thể, công trình này đề xuất mô hình lan truyền mã độc SIS dựa trên mạng và

trình bày một nghiên cứu chi tiết về đặc tính dịch tễ cơ bản và kết quả giải số cho mô hình đề xuất. Với động lực từ nghiên cứu này, nhiều nghiên cứu tiếp theo về các mô hình lan truyền mã độc dựa trên mạng phức hợp được tiến hành và thu được nhiều kết quả đáng chú ý như C.H. Li và cộng sự (2014), Y. Zan và cộng sự (2014), S. Huang và cộng sự (2017), H.F. Huo và cộng sự (2019), C. Li và A.M. Yousef (2019), K. Li và cộng sự (2019), S. Hosseini và A. Zandvakili (2022), vv.

Mặt khác, việc không có đầy đủ thông tin về các tham số, dữ liệu đầu vào do sai số tính toán, do hạn chế của các thiết bị đo hoặc do việc đo đạc, tính toán chính xác phức tạp và không cần thiết là một vấn đề thường gặp trong thực tế. Thêm vào đó, do môi trường của các quá trình truyền dẫn luôn chứa đựng những yếu tố bất định nên chúng ta cần tính đến các đại lượng biểu thị sự không chắc chắn khi thiết lập mô hình, giải quyết và diễn giải các vấn đề trong môi trường tự nhiên. Từ đó, hướng nghiên cứu kết hợp lý thuyết tập mờ, logic mờ hay giải tích mờ trong nghiên cứu về mô hình hóa các quá trình lan truyền phần mềm độc hại trên hệ thống mạng xuất hiện và có những kết quả đáng chú ý như các nghiên cứu về mô hình lan truyền mã độc mô tả bởi các phương trình vi phân với tham số mờ: E. Massad và cộng sự (2008), P.K. Mondal và cộng sự (2015), S.K. Nandi và cộng sự (2018), S. Adak và S. Jana (2022). Điểm mới của công trình này là xét tốc độ lan truyền mã độc, hàm xử lý mã độc chứa tham số mờ và xây dựng các khái niệm về giá trị kỳ vọng mờ của ngăn nhiễm bệnh, hệ số lây nhiễm thứ phát mờ. Tuy nhiên, các tài liệu này mới dừng lại ở việc giới thiệu mô hình lan truyền mã độc tổng quát với tham số hoặc điều kiện ban đầu mờ, các tính chất giải tích sâu hơn và đặc trưng dịch tễ của các mô hình lan truyền mã độc đề xuất chưa được xây dựng và thảo luận một cách bài bản. Đặc biệt, các nghiên cứu về mô hình lan truyền mã độc phân thứ nhận giá trị mờ hiện tại chưa có nhiều khảo sát. Một hướng nghiên cứu khác về các mô hình lan truyền mã độc đã kết hợp các hệ phương trình vi phân dựa trên mạng, hệ phương trình vi phân cỡ lớn và lý thuyết tập mờ - logic mờ như Zan và cộng sự (2014), Hosseini và Zandvakili (2022). Các nghiên cứu này sử dụng các cơ sở luật mờ để thiết lập cơ chế tương tác giữa các ngăn và xác định các tham số của mô hình.

Từ những vấn đề tổng quan trên, nghiên cứu sinh nhận thấy triển vọng phát triển hướng nghiên cứu về mô hình hóa sự lây lan các phần mềm độc hại trên mạng cảm biến không dây dựa trên các mô hình hệ phương trình vi phân với đạo hàm phân thứ. Thêm vào đó, để mô tả tốt hơn cho sự lan truyền phần mềm độc hại trong thế giới thực với nhiều yếu tố bất định, không chắc chắn trong tham số và dữ liệu, các mô hình lan truyền mã độc với tham số mờ hay thiết lập dựa trên logic mờ cũng cho thấy là một chủ đề có ý nghĩa khoa học và thực tiễn. Ngoài ra, qua quá trình nghiên cứu tổng quan, nghiên cứu sinh cũng nhận thấy rằng do mạng cảm biến không dây có cấu trúc mạng phức hợp không đồng nhất nên tiềm năng của nghiên cứu sự lây lan phần mềm độc hại trên mạng cảm biến không dây dựa trên sử dụng mô hình phương trình vi phân dựa trên mạng (“network-based differential systems”) kết hợp với lý thuyết tập mờ-logic mờ và tính toán phân thứ là thực sự hứa hẹn. Những ý tưởng nghiên cứu này bước

đầu đã được thực hiện trong luận án với kỳ vọng đóng góp một phần vào các nghiên cứu về mô hình hóa và tính chất định tính của các quá trình lây lan phần mềm độc hại trên mạng cảm biến không dây.

2. Mục tiêu, đối tượng và phạm vi nghiên cứu

2.1. Mục tiêu nghiên cứu

Luận án nghiên cứu một số mô hình toán học mô tả sự lan truyền các phần mềm độc hại trên một lớp mạng phức hợp không đồng nhất (mạng cảm biến không dây). Cụ thể, ba mục tiêu chính của luận án gồm:

- Thiết lập được một số mô hình toán học mô tả sự lan truyền mã độc trên mạng cảm biến không dây.
- Xác định được chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 -giá trị ngưỡng đặc trưng của các mô hình lan truyền mã độc.
- Khảo sát các tính chất định tính như: sự tồn tại duy nhất và tính dương của nghiệm đối với bài toán Cauchy cho các mô hình lan truyền mã độc, sự tồn tại các điểm cân bằng, tính ổn định tiệm cận, sự rẽ nhánh và bài toán điều khiển ổn định hóa.

2.2. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Luận án tập trung nghiên cứu các mô hình toán học mô tả sự lan truyền mã độc trên mạng cảm biến không dây với đối tượng và phạm vi nghiên cứu như sau:

- Các mô hình toán học của sự lan truyền mã độc trên một lớp mạng phức hợp không đồng nhất biểu diễn bởi các lớp hệ phương trình vi phân phân thứ với tham số mờ hoặc thiết lập bởi logic mờ;
- Tính chất định tính như tính dương, chỉ số ngưỡng lan truyền, sự ổn định tiệm cận và bài toán điều khiển cho mô hình lan truyền mã độc đề xuất.

3. Nội dung nghiên cứu

Nghiên cứu của luận án hướng tới 3 lớp mô hình lan truyền mã độc phân thứ với nội dung nghiên cứu tương ứng như sau:

Mô hình 1: Mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ. Đối với mô hình này, luận án tiến hành xây dựng nền tảng lý thuyết cơ bản về phép tính phân thứ theo nghĩa Caputo Atangana–Baleanu cho hàm nhận giá trị số mờ và nghiên cứu sự tồn tại và biểu diễn nghiệm tích phân mờ của bài toán Cauchy cho mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ.

Mô hình 2: Mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng với hàm lan

truyền xác định bởi logic mờ. Đối với mô hình lan truyền mã độc này, luận án khảo sát sự tồn tại và duy nhất của nghiệm không âm và khảo sát tính ổn định tiệm cận địa phương-toàn cục. **Mô hình 3:** Mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển với hàm xử lý mã độc bão hòa. Đối với mô hình lan truyền mã độc này, luận án tiến hành khảo sát sự tồn tại nghiệm không âm và nghiên cứu dáng điệu tiệm cận địa phương và toàn cục; Bài toán ổn định hóa cho mô hình lan truyền mã độc đề xuất dựa trên hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết

4. Phương pháp nghiên cứu

Trong các kết quả của luận án, nghiên cứu sinh đã kết hợp các công cụ của giải tích phân thứ, giải tích mờ và lý thuyết tập mờ, lý thuyết ổn định cho các hệ động lực phân thứ, giải tích ma trận và các kỹ thuật ước lượng, biến đổi bất đẳng thức ma trận.

5. Các kết quả đã đạt được

Luận án thiết lập và nghiên cứu tính chất định tính của các mô hình toán học mô tả sự lan truyền của mã độc trên mạng cảm biến không dây. Các kết quả đạt được của luận án gồm:

- (i) Thiết lập mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ với dữ liệu mờ sử dụng các khái niệm đạo hàm Caputo-Atangana-Baleanu phân thứ mờ (Định nghĩa 2.1) và tích phân Riemann-Liouville Atangana-Baleanu phân thứ mờ (Định nghĩa 2.2), chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm tích phân mờ của mô hình (Định lý 2.3 và Định lý 2.4) và thực hiện một số mô phỏng số.
- (ii) Thiết lập mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng với hàm lan truyền xác định bởi các luật mờ và chứng minh một số tính chất định tính của mô hình này như tính dương của nghiệm, chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 (Công thức (3.4)), sự ổn định tiệm cận của trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 (Định lý 3.3 và Định lý 3.4) và tính rẽ nhánh tiến tại $\mathfrak{R}_0 = 1$ (Định lý 3.5).
- (iii) Thiết lập mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển với hàm xử lý mã độc bão hòa và bài toán ổn định hóa cho mô hình này dựa trên hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết với các kết quả đạt được gồm tính dương của nghiệm, chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 (Công thức (4.3)), tính ổn định tiệm cận (Định lý 4.3 và Định lý 4.4), tính rẽ nhánh lùi tại $\mathfrak{R}_0 = 1$ (Định lý 4.5) và một số điều kiện đủ dạng bất đẳng thức ma trận cho tính ổn định hóa (Định lý 4.6) của trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 .

6. Cấu trúc của luận án

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, bố cục luận án gồm 4 chương:

Chương 1: Đây là chương kiến thức chuẩn bị gồm giới thiệu tổng quan về các phép toán đạo hàm và tích phân phân thứ, lý thuyết định tính của phương trình vi phân phân thứ, lý thuyết tập mờ và giải tích của các hàm nhận giá trị mờ, hệ mờ Takagi-Sugeno và mạng quy mô tự do.

Chương 2: Chương này nghiên cứu dáng điệu không chắc chắn của mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ mô tả sự lan truyền của mã độc trên mạng cảm biến. Với mục tiêu này, luận án trình bày các kết quả về đạo hàm và tích phân phân thứ theo nghĩa Atangana-Baleanu và ứng dụng khảo sát bài toán Cauchy cho phương trình vi phân phân thứ mờ.

Chương 3: Chương này trình bày nghiên cứu về mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng với hàm lan truyền dựa trên luật mờ bao gồm các nội dung: thiết lập mô hình lan truyền mã độc với hàm lan truyền dựa trên luật mờ, khảo sát các tính chất định tính của mô hình đề xuất và trình bày một số đánh giá và tính toán mô phỏng.

Chương 4: Trong chương này, luận án nghiên cứu mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển với hàm xử lý mã độc bão hòa với các nội dung về thiết lập mô hình lan truyền mã độc dựa trên mạng, khảo sát tính chất định tính và bài toán điều khiển ổn định hóa dựa trên hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này trình bày cơ sở lý thuyết và một số kiến thức bổ trợ cần thiết cho các chương tiếp theo được tham khảo từ các tài liệu Takagi và Sugeno (1985), Barabási và Albert (1999), Diethelm (2010), Bede (2013), Atangana và Baleanu (2016). Nội dung chương này bao gồm:

1.1. Một số vấn đề về giải tích phân thứ

Trong mục này, nghiên cứu sinh nhắc lại một số khái niệm và tính chất cơ bản của giải tích phân thứ và phương trình vi phân phân thứ.

1.2. Tập mờ và giải tích mờ

Mục này trình bày cơ sở lý thuyết về logic mờ, cơ sở luật mờ và lý thuyết về giải tích các hàm nhận giá trị mờ

1.3. Hệ mờ Takagi-Sugeno

Trong mục này, luận án trình bày tổng quan về hệ mờ Takagi-Sugeno và các phương pháp xây dựng hệ mờ Takagi-Sugeno cho hệ động lực phi tuyến.

1.4. Hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết

Mục này giới thiệu cấu trúc của hệ mờ Takagi-Sugeno cho hệ thống mạng cỡ lớn với các mô hình địa phương cho bởi phương trình vi phân phân thứ.

1.5. Mạng quy mô tự do

Mục này trình bày tổng quan về mạng quy mô tự do Barabási-Albert và mạng quy mô tự do Barabási-Albert giới hạn năng lượng để mô tả cấu trúc của mạng cảm biến.

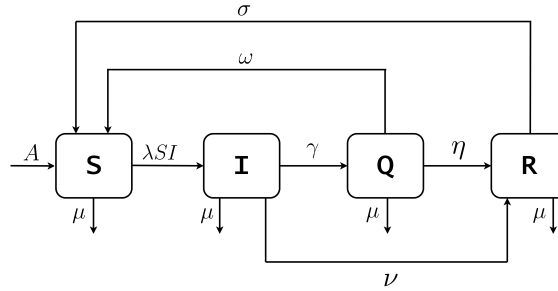
Chương 2

MÔ HÌNH LAN TRUYỀN MÃ ĐỘC SIQR PHÂN THỨ VỚI DỮ LIỆU MỜ

Chương này tập trung mô tả đáng điệu không chắc chắn của sự lan truyền mã độc trên mạng cảm biến không dây dựa trên mô hình hệ phương trình vi phân phân thứ mờ. Kết quả của Chương 2 được tham khảo từ công trình [P1].

2.1. Thiết lập mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ

Trong mục này, NCS nghiên cứu sử dụng mô hình hệ phương trình vi phân phân thứ mờ gồm 4 ẩn hàm (S-I-Q-R) tương ứng với 4 ngăn của mô hình lan truyền mã độc để đặc tả sự lan truyền của phần mềm độc hại trên mạng cảm biến không dây với các yếu tố không chắc chắn. Ký hiệu $S(t)$, $I(t)$, $Q(t)$ và $R(t)$ lần lượt bởi số lượng các nút miễn cảm, lan truyền, cách ly và hồi phục theo thời gian t . Khi đó, mô hình lan truyền mã độc mô tả sự lan truyền của các phần mềm độc hại được mô tả bởi sơ đồ sau (xem Hình 3.1).



Hình 2.1: Sơ đồ tương tác giữa các ngăn trong mô hình lan truyền mã độc SIQR

Để bảo vệ mạng cảm biến trước sự tấn công của mã độc, chúng ta cần nắm rõ các đặc điểm về dịch tễ của sự lan truyền. Trong chương này, luận án tiếp cận nghiên cứu cơ chế lan truyền mã độc dựa trên mô hình toán học. Cụ thể, luận án giả sử rằng mọi nút cảm biến ở các ngăn (S), (I), (Q) hoặc (R) rời khỏi mạng với tỷ lệ μ do cạn năng lượng. Đáng điệu động lực không chắc chắn của sự lan truyền mã độc trên mạng cảm biến được mô tả bởi hệ phương trình vi phân phân thứ dưới đây:

$$\begin{cases} {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta S(t) &= A - \lambda S(t)I(t) + \omega Q(t) + \sigma R(t) - \mu S(t) \\ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta I(t) &= \lambda S(t)I(t) - (\nu + \gamma + \mu)I(t) \\ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta Q(t) &= \gamma I(t) - (\eta + \mu + \omega)Q(t) \\ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta R(t) &= \nu I(t) + \eta Q(t) - (\sigma + \mu)R(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

với điều kiện ban đầu $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $Q(0) = Q_0$, $R(0) = R_0$.

2.2. Đạo hàm Caputo Atangana-Baleanu phân thứ và tích phân Riemann-Liouville Atangana-Baleanu phân thứ cho hàm nhận giá trị mờ

Định nghĩa 2.1. Giả sử rằng hàm $f(t)$ thuộc lớp $C^1([0, b], \mathcal{E})$. Khi đó, đạo hàm Caputo Atangana–Baleanu phân thứ $\beta \in (0, 1)$ của hàm giá trị mờ $f(t)$ được xác định bởi

$${}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) := \frac{\Phi(\beta)}{1-\beta} \int_0^t \mathbb{E}_\beta \left[-\beta \frac{(t-\tau)^\beta}{1-\beta} \right] f'_{gH}(\tau) d\tau.$$

Mệnh đề 2.1. Giả sử rằng hàm $f \in C^1([0, b], \mathcal{E})$ và các α -cắt của nó được biểu diễn dưới dạng tham số $[f(t)]^\alpha = [f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)]$ với mỗi $t \in [0, b]$ và $\alpha \in [0, 1]$. Khi đó

(i) Nếu f là hàm gH -khả vi loại 1 thì $\left[{}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right]^\alpha = \left[{}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^-(t), {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^+(t) \right]$.

(ii) Nếu f là hàm gH -khả vi loại 2 thì $\left[{}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right]^\alpha = \left[{}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^+(t), {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f_\alpha^-(t) \right]$.

Định nghĩa 2.2. Giả sử rằng hàm $f(t)$ thuộc lớp $L^1([0, b], \mathcal{E})$. Khi đó, tích phân Riemann–Liouville Atangana–Baleanu phân thứ $\beta \in (0, 1]$ của hàm $f(t)$ được định nghĩa như sau:

$${}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta f(t) := \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} f(t) + \frac{\beta}{\Phi(\beta)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau = \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} f(t) + \frac{\beta}{\Phi(\beta)} \mathcal{I}_+^\beta f(t).$$

Thêm vào đó, với mỗi $\alpha \in [0, 1]$, α -cắt của tích phân phân thứ ${}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta f(t)$ được cho bởi

$$\left[{}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta f(t) \right]^\alpha = \left[{}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta f_\alpha^-(t), {}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta f_\alpha^+(t) \right].$$

Nhận xét 2.1. Trong một số trường hợp đặc biệt của bậc phân thứ β , tích phân Riemann–Liouville Atangana–Baleanu phân thứ đồng nhất với các khái niệm đã biết:

(i) Nếu $\beta = 0$ thì tích phân Riemann–Liouville Atangana–Baleanu phân thứ trở thành

$${}^{ab}\mathcal{I}_+^0 f(t) = \frac{1-0}{\Phi(0)} f(t) + \frac{0}{\Phi(0)\Gamma(0)} \int_0^t (t-\tau)^{-1} f(\tau) d\tau = f(t).$$

(ii) Nếu $\beta = 1$ thì tích phân Riemann–Liouville Atangana–Baleanu phân thứ trở thành

$${}^{ab}\mathcal{I}_+^1 f(t) = \frac{1-1}{\Phi(1)} f(t) + \frac{1}{\Phi(1)\Gamma(1)} \int_0^t (t-\tau)^{1-1} f(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Định lý 2.1. Cho $\beta \in (0, 1)$ và $f : [0, T] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$ là hàm gH -khả vi, không có điểm chuyển trên $[0, T]$. Khi đó, tích phân Riemann–Liouville Atangana–Baleanu phân thứ và đạo hàm Caputo Atangana–Baleanu phân thứ của hàm $f(t)$ thỏa mãn:

$${}^{ab}\mathcal{I}_+^\beta \left({}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right) = f(t) \ominus_{gH} f(0), \quad t \in [0, T].$$

Mệnh đề 2.2. Cho $f : [0, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$ thuộc lớp $C^1([0, b], \mathcal{E})$. Khi đó, biến đổi Laplace mờ cho đạo hàm Caputo Atangana–Baleanu phân thứ ${}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t)$ của hàm $f(t)$ cho bởi

$$\tilde{\mathcal{L}} \left\{ {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta f(t) \right\} (s) = \begin{cases} \frac{\Phi(\beta)}{1-\beta} \frac{s^\beta \tilde{\mathcal{L}}\{f(t)\}(s) \ominus s^{\beta-1} f(0)}{s^\beta + \frac{\beta}{1-\beta}} & \text{nếu } f \text{ } gH\text{-khả vi loại 1} \\ \frac{(-1)\Phi(\beta)}{1-\beta} \frac{s^{\beta-1} f(0) \ominus s^\beta \tilde{\mathcal{L}}\{f(t)\}(s)}{s^\beta + \frac{\beta}{1-\beta}} & \text{nếu } f \text{ } gH\text{-khả vi loại 2.} \end{cases}$$

Mệnh đề 2.3. Giả sử rằng $f : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{E}$ là hàm liên tục. Khi đó, với mỗi $t > 0$, ta có

$$\mathcal{I} \left\{ \int_0^t \mathbb{E}_\beta \left[-\beta \frac{(t-\tau)^\beta}{1-\beta} \right] f(\tau) d\tau \right\} (s) = \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + \frac{\beta}{1-\beta}} \mathcal{I} \{f(t)\} (s).$$

2.3. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm mờ cho bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân phân thứ dưới tính gH-khả vi

Trong mục này, NCS nghiên cứu sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm tích phân mờ cho bài toán Cauchy dưới đây đối với phương trình vi phân phân thứ mờ dưới tính gH-khả vi và đạo hàm Caputo Atangana–Baleanu phân thứ:

$$\begin{cases} {}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta x(t) = F(t, x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

trong đó ${}^{abc}\mathcal{D}_+^\beta x(t)$ là đạo hàm Caputo Atangana–Baleanu phân thứ của $x(t)$, $t \in J = [0, T]$, $x_0 \in \mathcal{E}^n$ và $F : [0, T] \times \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$ là hàm nhận giá trị vectơ mờ thỏa mãn các giả thiết sau :

(HF1) Hàm nhận giá trị vectơ mờ $F(\cdot, \xi) : [0, T] \rightarrow \mathcal{E}^n$ đo được mạnh với mỗi $\xi \in \mathcal{E}^n$ và $F(t, \cdot) : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$ liên tục với hầu khắp $t \in [0, T]$;

(HF2) Tồn tại ma trận M_0 sao cho $\mathbb{D}_n(F(t, \xi), \hat{\mathbf{0}}) \leq M_0 \mathbb{D}_n(\xi, \hat{\mathbf{0}})$ với mọi $\xi \in \mathcal{E}^n$.

(HF3) Tồn tại ma trận M_1 sao cho $\mathbb{D}_n(F(t, \xi), F(t, \bar{\xi})) \leq M_1 \mathbb{D}_n(\xi, \bar{\xi})$ với mọi $\xi, \bar{\xi} \in \mathcal{E}^n$.

Xét không gian

$$C([0, T], \mathcal{E}^n) = \{\varphi : [0, T] \rightarrow \mathcal{E}^n : \varphi(t) \text{ là hàm liên tục trên đoạn } [0, T]\}$$

cùng metric có trọng $\mathcal{H}_\lambda(\varphi, \psi) = \sup_{[0, T]} \{\mathbb{D}_n(\varphi(t), \psi(t))e^{-\lambda t}\}$, trong đó $\lambda > 0$ đủ lớn. Không gian $(C([0, T], \mathcal{E}^n), \mathcal{H}_\lambda)$ là một không gian metric đầy. Giả sử rằng các hàm thành phần của $x(t)$ có cùng kiểu gH-khả vi và không có điểm chuyển trên $J = [0, T]$. Xét định lý sau:

Định lý 2.2. Giả sử rằng $x \in C([0, T], \mathcal{E}^n)$ thỏa mãn bài toán Cauchy (2.2).

(i) Nếu $x(t)$ là hàm gH-khả vi gH loại 1 thì nó thỏa mãn phương trình tích phân sau

$$x(t) = x_0 + \frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} F(t, x(t)) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} F(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (2.3)$$

(ii) Nếu $x(t)$ là hàm gH-khả vi gH loại 2 thì nó thỏa mãn phương trình tích phân sau

$$x(t) = x_0 \ominus (-1) \left[\frac{1-\beta}{\Phi(\beta)} F(t, x(t)) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} F(\tau, x(\tau)) d\tau \right]. \quad (2.4)$$

Định nghĩa 2.3. Cho $x : [0, T] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}^n$ là hàm liên tục. Khi đó ta có

- (i) Hàm $x(t)$ được gọi là nghiệm tích phân loại (i) của bài toán Cauchy (2.2) nếu nó thỏa mãn phương trình tích phân (2.3).

(ii) Hàm $x(t)$ được gọi là nghiệm tích phân loại (ii) của bài toán Cauchy (2.2) nếu nó thỏa mãn phương trình tích phân (2.4).

Định lý 2.3. *Nếu các giả thiết (HF1), (HF2), (HF3) thỏa mãn và bán kính phổ của các ma trận $\frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)}M_0$ và $\frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)}M_1$ đều nhỏ hơn 1 thì bài toán Cauchy (2.2) có duy nhất nghiệm tích phân loại (i) xác định trên đoạn $[0, T]$.*

Với mỗi $x \in C([0, T], \mathcal{E}^n)$, xét toán tử $\mathcal{F}[x]$ cho bởi

$$\mathcal{F}[x](t) = x_0 \ominus \left[\frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)}F(t, x(t)) + \frac{\beta}{\Gamma(\beta)\Phi(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} F(\tau, x(\tau)) d\tau \right]. \quad (2.5)$$

Ký hiệu $\hat{C}([0, T], \mathcal{E}^n)$ là không gian các hàm $x \in C([0, T], \mathcal{E}^n)$ sao cho đẳng thức (2.5) đúng với mọi $t \in [0, T]$.

Định lý 2.4. *Giả sử rằng tập $\hat{C}([0, T], \mathcal{E}^n) \neq \emptyset$, các giả thiết (HF1), (HF2), (HF3) thỏa mãn và bán kính phổ của ma trận $\frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)}M_0$, $\frac{(1-\beta)}{\Phi(\beta)}M_1$ nhỏ hơn 1. Khi đó, bài toán Cauchy (2.2) có duy nhất nghiệm tích phân loại (ii) xác định trên $[0, T]$.*

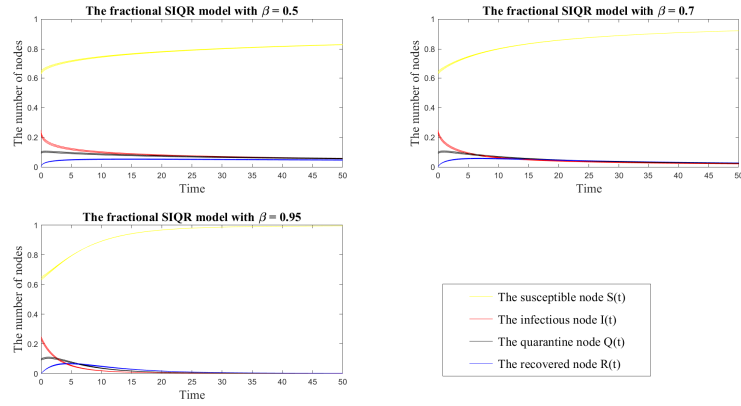
Nhận xét 2.2. Luận án đã giả sử rằng hàm thành phần của vectơ nghiệm $x(t)$ có cùng loại gH-khả vi và không có điểm chuyển trên $J = [0, T]$. Tổng quát, nếu các hàm thành phần của $x(t) = \left(x_1(t) \ \cdots \ x_n(t) \right)^\top$ có loại gH-khả vi khác nhau trên J thì sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm trình bày trong Định lý 2.3 và Định lý 2.4 vẫn được đảm bảo.

2.4. Mô phỏng và thảo luận

(a) NCS mô phỏng đáng điệu không chắc chắn của nghiệm của mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ (2.1) với các tham số

$$\begin{array}{llll} A = 0.2 & \mu = 0.2 & \lambda = 0.3 & \nu = 0.15 \\ \omega = 0.008 & \sigma = 0.01 & \gamma = 0.2 & \eta = 0.008 \end{array}$$

và điều kiện ban đầu không chắc chắn $S_0 = (0.63, 0.64, 0.65)$, $I_0 = (0.23, 0.24, 0.25)$, $Q_0 = (0.09, 0.095, 0.1)$ và $R_0 = (0, 0, 0)$. Hình 2.2 biểu diễn đáng điệu theo thời gian của nghiệm số của mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ với một số giá trị khác nhau của bậc phân thứ β . Đối với các tham số trên, chúng ta có thể tính toán được chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 xấp xỉ $\mathfrak{R}_0 = 0.545 < 1$, tức là theo lý thuyết dịch tễ học, chúng ta có trạng thái cân bằng không có mã độc là ổn định tiệm cận. Trên thực tế, từ Hình 2.2, chúng ta có thể thấy rằng thành phần lan truyền $I(t)$ của nghiệm có xu hướng tiệm cận về 0 theo thời gian, nghĩa là các mã độc có thể được loại bỏ khỏi mạng.

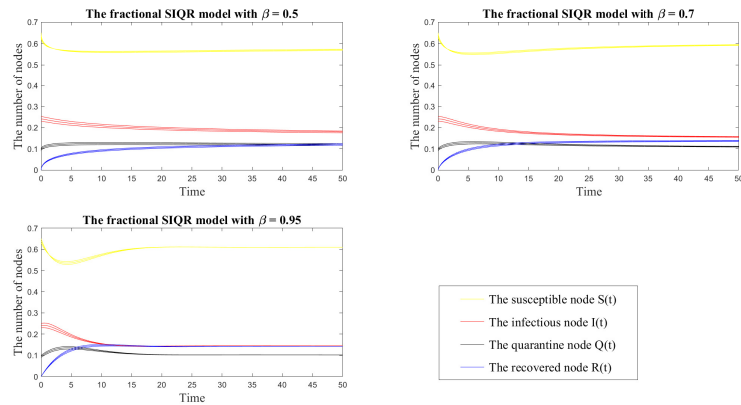


Hình 2.2: Dạng điệu của nghiệm số cho mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ trong Trường hợp tham số (a)

(b) NCS mô phỏng dạng điệu không chắc chắn của nghiệm của mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ (2.1) với các tham số

$$\begin{array}{cccc} A = 0.2 & \mu = 0.2 & \lambda = 0.9 & \nu = 0.15 \\ \omega = 0.008 & \sigma = 0.01 & \gamma = 0.2 & \eta = 0.008 \end{array}$$

với điều kiện ban đầu mờ $S_0 = (0.63, 0.64, 0.65)$, $I_0 = (0.23, 0.24, 0.25)$, $Q_0 = (0.09, 0.095, 0.1)$ và $R_0 = (0, 0, 0)$. Hình 2.3 biểu diễn dạng điệu theo thời gian của nghiệm số của mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ với một số giá trị khác nhau của bậc phân thứ β . Đối với các tham số trên, chúng ta có thể tính toán được chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 xấp xỉ $\mathfrak{R}_0 = 1.636 > 1$. Điều này có nghĩa là trạng thái cân bằng không có mã độc không ổn định và do đó, sự lan truyền của mã độc sẽ tiếp diễn trên mạng. Thật vậy, theo Hình 2.3, chúng ta có thể thấy rằng dạng điệu của hàm trạng thái lan truyền $I(t)$ tiệm cận một giá trị dương (thành phần I^* của điểm cân bằng đặc hữu) khi thời gian đủ lớn.



Hình 2.3: Dạng điệu của nghiệm số cho mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ mờ trong Trường hợp tham số (b)

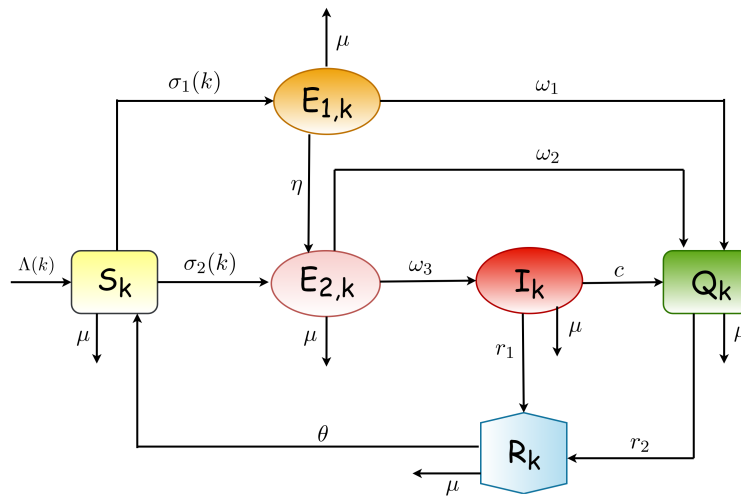
Chương 3

MÔ HÌNH LAN TRUYỀN MÃ ĐỘC SE_1E_2IQR PHÂN THỨ DỰA TRÊN MẠNG VỚI HÀM LAN TRUYỀN XÁC ĐỊNH BỞI LOGIC MỜ

Với mục tiêu thể hiện đồng thời sự không đồng nhất trong tiếp xúc với phần mềm độc hại của các nút mạng trong mạng cảm biến không dây và các yếu tố không chắc chắn ảnh hưởng trực tiếp tới sự lan truyền, chương này tập trung nghiên cứu mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng với hàm lan truyền được xác định bởi logic mờ, trong đó mô hình lan truyền mã độc đề xuất giới thiệu một ngăn cách ly (Q) và nhóm nút mạng mã độc gồm hai ngăn: E_1 (Mang mã độc loại 1) và E_2 (Mang mã độc loại 2). Chương này được viết dựa trên công bố [P2].

3.1. Thiết lập mô hình

Trong mục này, luận án xét mạng cảm biến không dây với cấu trúc như một mạng quy mô tự do Barabási-Albert giới hạn năng lượng và tiến hành mô tả cơ chế lan truyền của mã độc trên mạng dựa trên mô hình hóa toán học. Luận án tiến hành chia tổng số nút mạng thành n nhóm dựa trên số liên kết mà một nút trong nhóm có trên một đơn vị thời gian. Ký hiệu $S_k(t)$, $E_{1,k}(t)$, $E_{2,k}(t)$, $I_k(t)$, $Q_k(t)$ và $R_k(t)$ lần lượt là mật độ của các nút miễn cảm, mang mã độc loại 1, mang mã độc loại 2, lan truyền, cách ly và hồi phục bậc k với mỗi $k = 1, 2, \dots, n$. Quá trình lan truyền phần mềm độc hại trên mạng có thể được mô tả trong sơ đồ sau:



Hình 3.1: Sơ đồ lan truyền phần mềm độc hại giữa sáu ngăn: Miễn cảm (S), Mang mã độc loại 1 (E_1), Mang mã độc loại 2 (E_2), Lan truyền (I), Cách ly (Q), Hồi phục (R)

Thực tế là tốc độ truyền tải thông tin trên mạng chịu ảnh hưởng trực tiếp của các yếu tố bất định như địa lý, khí hậu. Do đó, luận án đề xuất sử dụng biến ngôn ngữ q ($q \in \{\text{cao, trung bình, thấp}\}$) để biểu thị những yếu tố không chắc chắn xảy ra trong mô hình hóa mô hình dịch. Cụ thể, luận án gán ba biến ngôn ngữ “Thấp”, “Trung bình”, “Cao” với các giá trị mờ ứng với các luật mờ và sử dụng hệ suy luận mờ để đưa các luật này vào mô hình lan truyền mã độc đề xuất dưới dạng hằng số lan truyền M_q . Thật vậy, xét ba số mờ $A_1 = (0, 0, 0.3, 0.4)$, $A_2 = (0.3, 0.5, 0.7)$ và $A_3 = (0.6, 0.7, 1, 1)$ đại diện cho các thuật ngữ “thấp”, “trung bình”, “cao” và sử dụng hai số mờ tam giác $B_1 = (0, 0.3, 0.6)$ và $B_2 = (0.4, 0.7, 1.0)$ để xác định trạng thái đầu ra khi kết hợp các luật sẽ thuộc ngăn Mạng mã độc loại 1 hay Mạng mã độc loại 2.

Đặt x biểu thị cho mật độ của nút lan truyền, y biểu thị cho tốc độ thay đổi trạng thái của nút và z biểu thị cho trạng thái đầu ra của mỗi quy tắc. Bây giờ, NCS đề xuất một hệ mờ MISO với 9 luật như sau:

Luật 1: Nếu x “THẤP” và y “THẤP” thì z thuộc trạng thái E_1 .

Luật 2: Nếu x “THẤP” và y “TRUNG BÌNH” thì z thuộc trạng thái E_1 .

Luật 3: Nếu x “TRUNG BÌNH” và y “THẤP” thì z thuộc trạng thái E_1 .

Luật 4: Nếu x “TRUNG BÌNH” và y “TRUNG BÌNH” thì z thuộc trạng thái E_2 .

Luật 5: Nếu x “THẤP” và y “CAO” thì z thuộc trạng thái E_2 .

Luật 6: Nếu x “TRUNG BÌNH” và y “CAO” thì z thuộc trạng thái E_2 .

Luật 7: Nếu x “CAO” và y “THẤP” thì z thuộc trạng thái E_2 .

Luật 8: Nếu x “CAO” và y “TRUNG BÌNH” thì z thuộc trạng thái E_2 .

Luật 9: Nếu x “CAO” và y “CAO” thì z thuộc trạng thái E_2 .

Dựa vào lược đồ trong Hình 3.1, NCS thiết lập mô hình toán học mô tả sự lan truyền phần mềm độc hại giữa sáu ngăn (S), (E_1), (E_2), (I), (Q) và (R) trong mạng cảm biến không dây. Thêm vào đó, với mục tiêu thể hiện tính không địa phương và tính nhớ của quá trình khuếch tán dữ liệu, NCS sử dụng đạo hàm phân thứ Caputo để thiết lập một mô hình phương trình vi phân cỡ lớn, gọi là mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng, cho quá trình lan truyền phần mềm độc hại. Cụ thể, với mỗi $k = \overline{1, n}$, NCS xét hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} {}^C_0\mathcal{D}_t^\beta S_k(t) &= \Lambda(k) - (\sigma_1(k) + \sigma_2(k)) S_k(t)\Theta(t) - \mu S_k(t) + \theta R_k(t) \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\beta E_{1,k}(t) &= \sigma_1(k) S_k(t)\Theta(t) - (\eta + \omega_1 + \mu) E_{1,k}(t) \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\beta E_{2,k}(t) &= \sigma_2(k) S_k(t)\Theta(t) - (\mu + \omega_2 + \omega_3) E_{2,k}(t) + \eta E_{1,k}(t) \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\beta I_k(t) &= \omega_3 E_{2,k}(t) - (\mu + c + r_1) I_k(t) \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\beta Q_k(t) &= \omega_1 E_{1,k}(t) + \omega_2 E_{2,k}(t) + c I_k(t) - (r_2 + \mu) Q_k(t) \\ {}^C_0\mathcal{D}_t^\beta R_k(t) &= r_1 I_k(t) + r_2 Q_k(t) - (\mu + \theta) R_k(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

với điều kiện ban đầu

$$S_k(0) = S_k^0, E_{1,k}(0) = E_{1,k}^0, E_{2,k}(0) = E_{2,k}^0, I_k(0) = I_k^0, Q_k(0) = Q_k^0, R_k(0) = R_k^0, \quad (3.2)$$

trong đó $\sigma_1(k), \sigma_2(k)$ lần lượt là tỷ lệ lan truyền phụ thuộc bậc của nút cho bởi $\sigma_1(k) = \sigma_1 k$, $\sigma_2(k) = \sigma_2 k$. Ngoài ra, NCS giả sử rằng số nút bậc k ban đầu thỏa mãn

$$N_k(t) = \frac{\Lambda(k)}{\mu} \mathbb{E}_{\beta}(-\mu t^{\beta}) + \frac{\Lambda(k)}{\mu} [1 - \mathbb{E}_{\beta,1}(-\mu t^{\beta})] = \frac{\Lambda(k)}{\mu} := b_k.$$

Hàm $\Theta(t)$ đại diện cho xác suất mà một liên kết cho trước kết nối với một nút lan truyền cho bởi $\Theta(t) = \frac{M_q}{\langle k \rangle} \sum_{i=1}^n \frac{\nu(i)}{b_i} \mathbb{P}(i) I_i(t)$, trong đó $\mathbb{P}(i)$ là xác suất để một nút được chọn ngẫu nhiên có bậc i , $\langle k \rangle = \sum_{i=1}^n i \mathbb{P}(i)$ biểu thị cho bậc kết nối trung bình của mạng, $M_q \in [0, 1]$ là tham số đầu ra của hệ MISO được suy ra từ các luật mờ cho biến ngôn ngữ q , hàm $\nu(i) = i$ đại diện cho số lượng liên kết trung bình mà một nút lan truyền bậc i sẽ lan truyền phần mềm độc hại đến các nút khác.

3.2. Tính chất định tính của mô hình

3.2.1. Sự tồn tại tập bất biến dương

$$\text{Ký hiệu } \mathbf{x}^k(t) = \left(E_{1,k}(t) \quad E_{2,k}(t) \quad I_k(t) \quad S_k(t) \quad Q_k(t) \quad R_k(t) \right)^{\top}, \mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{x}^1(t) \quad \dots \quad \mathbf{x}^n(t) \right)^{\top}$$

$$f(\mathbf{x}^k(t)) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}^k(t)) \\ f_2(\mathbf{x}^k(t)) \\ f_3(\mathbf{x}^k(t)) \\ f_4(\mathbf{x}^k(t)) \\ f_5(\mathbf{x}^k(t)) \\ f_6(\mathbf{x}^k(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1(k) S_k(t) \Theta(t) - (\eta + \omega_1 + \mu) E_{1,k}(t) \\ \sigma_2(k) S_k(t) \Theta(t) - (\mu + \omega_2 + \omega_3) E_{2,k}(t) + \eta E_{1,k}(t) \\ \omega_3 E_{2,k}(t) - (\mu + c + r_1) I_k(t) \\ \Lambda(k) - (\sigma_1(k) + \sigma_2(k)) S_k(t) \Theta(t) - \mu S_k(t) + \theta R_k(t) \\ \omega_1 E_{1,k}(t) + \omega_2 E_{2,k}(t) + c I_k(t) - (r_2 + \mu) Q_k(t) \\ r_1 I_k(t) + r_2 Q_k(t) - (\mu + \theta) R_k(t) \end{pmatrix},$$

Mục này bắt đầu với kết quả về sự tồn tại duy nhất nghiệm không âm và tập bất biến dương cho mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR . Trước tiên, NCS xét bảng ký hiệu sau:

Bảng 3.1: Bảng ký hiệu viết tắt

Ký hiệu	Giá trị	Ký hiệu	Giá trị
b_k	$\frac{\Lambda(k)}{\mu}$	α_1	$\omega_1 + \mu + \eta$
α_2	$\omega_2 + \omega_3 + \mu$	α_3	$r_2 + \mu$
α_4	$\mu + \theta$	α_5	$r_1 + c + \mu$
$\alpha_{6,k}$	$\eta \sigma_1(k) + \alpha_1 \sigma_2(k)$	$\alpha_{7,k}$	$\alpha_2 \alpha_5 \sigma_1(k) \omega_1 + \alpha_5 \alpha_{6,k} \omega_2 + c \alpha_3 \alpha_{6,k} \omega_3$

Định lý 3.1. *Giả sử rằng*

$$S_k^0 > 0, \quad E_{1,k}^0 \geq 0, \quad E_{2,k}^0 \geq 0, \quad I_k^0 \geq 0, \quad Q_k^0 \geq 0, \quad R_k^0 \geq 0 \quad (3.3)$$

với mọi $k = \overline{1, n}$. Khi đó, mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng với điều kiện ban đầu $\mathbf{x}(0)$ thỏa mãn (3.3) luôn có nghiệm không âm duy nhất $\mathbf{x}(t)$ và hàm $\Theta(t)$ dương với mọi $t > 0$. Hơn nữa, tập $\Sigma^+ = \{ \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}_+^{6n} : S_k + E_{1,k} + E_{2,k} + I_k + Q_k + R_k = b_k, k = \overline{1, n} \}$ là một tập bất biến dương của mô hình lan truyền mã độc đề xuất.

3.2.2. Chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 và các trạng thái cân bằng

Các trạng thái cân bằng được xác định bởi hệ phương trình $f(\mathbf{x}^k(t)) = \bar{0}$. Dễ thấy rằng ở trạng thái cân bằng không có mã độc, do giả sử không có mã độc lan truyền trên mạng nên $E_{1,k} = E_{2,k} = I_k = 0$ với mọi $k = \overline{1, n}$. Do đó, mô hình lan truyền mã độc đề xuất có trạng thái cân bằng không có mã độc duy nhất \mathbf{P}_0 cho bởi $\mathbf{P}_0 = \underbrace{(0, 0, 0, b_1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, b_n, 0, 0)}_{6n}$. Tiếp theo, sử dụng phương pháp ma trận thế hệ tiếp theo, luận án xác định được chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 . Thật vậy, sự lan truyền trong mô hình lan truyền mã độc đề xuất có các đặc trưng sau:

- Chỉ có ba ngăn gây lan truyền mã độc trong mô hình lan truyền mã độc đề xuất, đó là ngăn mang mã độc loại 1 (E_1), mang mã độc loại 2 (E_2) và lan truyền (I).
- Sự chuyển dịch các nút từ các ngăn mang mã độc sang ngăn lan truyền hoặc giữa hai ngăn mang mã độc chỉ là sự di chuyển của các nút nhiễm bệnh qua các ngăn.

Khi đó, chúng ta tìm được chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 như sau:

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{M_q}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{\omega_3 \nu(k) \mathbb{P}(k) (\eta \sigma_1(k) + \alpha_1 \sigma_2(k))}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5} = \frac{\omega_3 M_q \langle \alpha_6 \nu \rangle}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5 \langle k \rangle}, \quad (3.4)$$

trong đó $\langle \alpha_6 \nu \rangle = \sum_{k=1}^n \nu(k) \mathbb{P}(k) (\eta \sigma_1(k) + \alpha_1 \sigma_2(k))$.

Tiếp theo, chúng ta ký hiệu $A_k = M_q \nu(k) \mathbb{P}(k) \alpha_3 \alpha_4 \alpha_{6,k} \omega_3$, $\tilde{A}_2 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5$ và

$$\tilde{A}_{1,k} = \omega_3 (\alpha_3 \alpha_4 \alpha_{6,k} + r_1 \alpha_3 \alpha_{6,k}) + (\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_{6,k} + \alpha_4 \alpha_{7,k} + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \sigma_1(k) + r_2 \alpha_{7,k}) = \omega_3 \alpha_{8,k} + \alpha_{9,k}.$$

Định lý 3.2. *Nếu $\mathfrak{R}_0 > 1$ thì mô hình lan truyền mã độc đề xuất có trạng thái cân bằng đặc hữu duy nhất $\mathbf{P}_* = (E_{1,1}^*, E_{2,1}^*, I_1^*, S_1^*, Q_1^*, R_1^*, \dots, E_{1,n}^*, E_{2,n}^*, I_n^*, S_n^*, Q_n^*, R_n^*)$, cho bởi*

$$\begin{aligned} S_k^* &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5}{\omega_3 \alpha_{6,k} \Theta^*} I_k^*, & E_{1,k}^* &= \frac{\alpha_2 \alpha_5 \sigma_1(k)}{\omega_3 \alpha_{6,k}} I_k^*, & E_{2,k}^* &= \frac{\alpha_5}{\omega_3} I_k^*, & Q_k^* &= \frac{\alpha_{7,k}}{\omega_3 \alpha_3 \alpha_{6,k}} I_k^*, \\ R_k^* &= \frac{r_1 \alpha_3 \alpha_{6,k} \omega_3 + r_2 \alpha_{7,k}}{\alpha_3 \alpha_4 \alpha_{6,k} \omega_3} I_k^*, & \Theta^* &= \frac{M_q}{\langle k \rangle} \sum_{i=1}^n \frac{\nu(i)}{b_i} \mathbb{P}(i) I_i^*, & I_k^* &= \frac{b_k \alpha_3 \alpha_4 \alpha_{6,k} \omega_3 \Theta^*}{(\omega_3 \alpha_{8,k} + \alpha_{9,k}) \Theta^* + \tilde{A}_2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.2.3. Dáng điệu tiệm cận của điểm cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0

Trong phần này, NCS thảo luận về dáng điệu tiệm cận của mô hình lan truyền mã độc đề xuất. Đầu tiên là mối quan hệ giữa \mathfrak{R}_0 và sự ổn định tiệm cận địa phương của trạng thái cân bằng \mathbf{P}_0 :

Định lý 3.3. *Các mệnh đề sau đúng:*

- (i) *Nếu $\mathfrak{R}_0 > 1$ thì trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 không ổn định.*

- (ii) Nếu $\mathfrak{R}_0 < 1$ và $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_5 > \frac{\sigma_2 M_q \langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle}$ thì trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 ổn định tiệm cận địa phương.
- (iii) Nếu $\mathfrak{R}_0 < 1$ và $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_5 \leq \frac{\sigma_2 M_q \langle n^2 \rangle}{\langle n \rangle}$ thì sự ổn định của trạng thái cân bằng không có mã độc phụ thuộc vào giá trị của các tham số và bậc phân thứ β .

Tiếp theo, NCS thảo luận về một vấn đề quan trọng trong lý thuyết dịch tễ học liên quan đáng chú ý tiệm cận toàn cục của trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 :

Định lý 3.4. *Nếu giá trị ngưỡng*

$$\tilde{\mathfrak{R}}_0 = \frac{\omega_3 M_q (\sigma_1 + \sigma_2) \langle n^2 \rangle}{\alpha_2 \alpha_5 \langle n \rangle} < 1$$

thì trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 của mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng ổn định tiệm cận toàn cục trên Σ^+ .

Nhận xét 3.1. Vì $\alpha_1 = \eta + \mu + \omega_1 > \eta$ nên $\frac{\omega_3(\sigma_1(k) + \sigma_2(k))}{\alpha_2 \alpha_5} > \frac{\omega_3(\eta \sigma_1(k) + \alpha_1 \sigma_2(k))}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5}$, tức là $\tilde{\mathfrak{R}}_0 > \mathfrak{R}_0$. Mặt khác, theo Định lý 3.4, do trạng thái cân bằng \mathbf{P}_0 ổn định tiệm cận toàn cục chỉ khi $\tilde{\mathfrak{R}}_0 > 1$ nên điều kiện $\mathfrak{R}_0 < 1$ là không đủ để loại bỏ dịch bệnh trên mạng.

3.2.4. Phân tích tính rẽ nhánh

Trong mục này, luận án sẽ thảo luận về hiện tượng rẽ nhánh xảy ra khi $\mathfrak{R}_0 = 1$.

Định lý 3.5. *Mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng luôn rẽ nhánh thuận tại $\mathfrak{R}_0 = 1$ với mọi giá trị của tham số.*

Chương 4

BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH HÓA CHO MÔ HÌNH LAN TRUYỀN MÃ ĐỘC SIRS PHÂN THỨ DỰA TRÊN MẠNG CÓ ĐIỀU KHIỂN

Trong chương này, NCS thiết lập mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển với hàm xử lý mã độc bão hòa nhằm mô tả động lực tấn công của các phần mềm độc hại trên mạng cảm biến không dây trong trường hợp số nút bị nhiễm vượt quá khả năng xử lý phần mềm độc hại của mạng. Kết quả của chương này dựa trên công trình [P3] và [P4].

4.1. Thiết lập mô hình

Trong chương này, NCS đề xuất sử dụng mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng để nghiên cứu ảnh hưởng của sự lây lan phần mềm độc hại trên mạng phức hợp không đồng nhất. Ký hiệu $S_k(t)$, $I_k(t)$ và $R_k(t)$ lần lượt là mật độ của các nút miễn cảm, lan truyền và phục hồi bậc k tại thời điểm t . Ngoài ra, NCS giả sử rằng $N_k(t) = S_k(t) + I_k(t) + R_k(t)$ là mật độ các nút có bậc k tại thời điểm t . Sự chuyển trạng thái giữa ba ngăn dựa trên các quy tắc sau:

- Mỗi nút trở thành nút chết với tỷ lệ μ khi cạn năng lượng và nút mới được bổ sung vào mạng với tỷ lệ Λ . Tỷ lệ Λ và tỷ lệ rời mạng μ được giả sử là bằng nhau để đảm bảo sự cân bằng và liên tục của mạng.
- Một nút miễn cảm bậc k tiếp xúc với mã độc sẽ chuyển sang trạng thái lan truyền theo tỷ lệ $\sigma_k \Theta(t)$, với σ_k là tốc độ truyền khi các nút nhạy cảm tiếp xúc với mã độc. Ngoài ra, một nút miễn cảm có thể được chuyển sang trạng thái (R) với tỷ lệ cách ly biến thiên $\mathbf{u}_k(t)$.
- Luận án xét hàm xử lý mã độc phi tuyến dưới dạng $\varphi(I_k) = \frac{r I_k}{1 + \gamma \Theta}$, với r là tốc độ xử lý và γ được sử dụng để đo mức độ ảnh hưởng của các nút lan truyền bị trì hoãn xử lý.
- Các nút ở trạng thái (R) đăng xuất mạng với tỷ lệ μ do cạn năng lượng và các nút hồi phục có thể mất khả năng tự bảo vệ trước mã độc và trở lại nút nhạy cảm với tỷ lệ ω .

Dựa trên những ưu điểm của đạo hàm bậc không nguyên trong mô hình hóa các quá trình không địa phương và nhằm thể hiện ảnh hưởng của tính nhớ trong các quá trình lây lan mã độc trên mạng, luận án nghiên cứu sự lan truyền mã độc trên mạng cảm biến không dây với

đạo hàm bậc phân. Cụ thể, NCS xét hệ phương trình vi phân phân thứ cho nhóm thứ k sau:

$$\begin{cases} {}^C_0\mathfrak{D}_t^\beta S_k(t) &= \Lambda - \sigma_k \Theta(t) S_k(t) - (\mu + \mathbf{u}_k(t)) S_k(t) + \omega R_k(t) \\ {}^C_0\mathfrak{D}_t^\beta I_k(t) &= \sigma_k \Theta(t) S_k(t) - \mu I_k(t) - \frac{r I_k(t)}{1 + \gamma \Theta(t)} \\ {}^C_0\mathfrak{D}_t^\beta R_k(t) &= \mathbf{u}_k(t) S_k(t) + \frac{r I_k(t)}{1 + \gamma \Theta(t)} - (\mu + \omega) R_k(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

với điều kiện ban đầu

$$S_k(0) = S_k^0 > 0, \quad I_k(0) = I_k^0 \geq 0, \quad R_k(0) = R_k^0 \geq 0. \quad (4.2)$$

Hàm $\Theta(t) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n \varphi(k) \mathbb{P}(k) I_k(t)$ là xác suất để một liên kết cho trước được kết nối với một nút lan truyền, trong đó $\mathbb{P}(k)$ là xác suất để một nút được chọn ngẫu nhiên có bậc k , $\varphi(k) = k$ là khả năng lan truyền của nút bậc k và $\langle k \rangle = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(k)$ là bậc kết nối trung bình của mạng.

4.2. Tính chất định tính của mô hình

4.2.1. Sự tồn tại tập bất biến dương

Để thuận tiện trong trình bày, NCS ký hiệu

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_k(t) &= \left(S_k(t) \quad I_k(t) \quad R_k(t) \right)^\top, \quad \tilde{\mathbf{x}}(t) = \left(\tilde{\mathbf{x}}_1(t) \quad \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{x}}_n(t) \right)^\top \\ \Sigma^+ &= \left\{ \tilde{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}_+^{3n} : S_k(t) + I_k(t) + R_k(t) = 1, \quad k = \overline{1, n}, \quad t \geq 0 \right\} \\ F_k(t, \tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) &= \begin{pmatrix} \Lambda - \sigma_k \Theta(t) S_k(t) - (\mu + \mathbf{u}_k(t)) S_k(t) + \omega R_k(t) \\ \sigma_k \Theta(t) S_k(t) - \mu I_k(t) - \frac{r I_k(t)}{1 + \gamma \Theta(t)} \\ \mathbf{u}_k(t) S_k(t) + \frac{r I_k(t)}{1 + \gamma \Theta(t)} - (\mu + \omega) R_k(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Điều khiển đầu vào $\mathbf{u}_k(t)$ được xem như tỷ lệ các nút miễn cảm được bảo vệ bởi tường lửa trên một đơn vị thời gian. Ký hiệu

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \mathbf{u}(\cdot) \in (L^1[0, T])^n : 0 \leq \mathbf{u}_k(t) \leq b, \quad k = \overline{1, n} \right\} \quad (0 < b < 1),$$

là tập điều khiển chấp nhận được bao gồm các hàm đo được Lebesgue trên đoạn $[0, T]$.

Định lý 4.1. *Với mỗi điều khiển đầu vào $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{ad}$, bài toán Cauchy cho mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển có duy nhất một nghiệm không âm $\tilde{\mathbf{x}}(t)$. Thêm vào đó, nếu $\tilde{\mathbf{x}}(0) \in \Sigma^+$ thì với mọi $t > 0$, nghiệm $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ thuộc vào tập Σ^+ .*

4.2.2. Chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 và các trạng thái cân bằng

Để tìm các trạng thái cân bằng, NCS giải hệ phương trình đại số $F_k(t, \tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) = \bar{0}$. Nếu mạng không có phần mềm độc hại thì mô hình lan truyền mã độc đề xuất nhận trạng thái cân

bằng không có mã độc duy nhất $\mathbf{P}_0 = (S_1^0, I_1^0, R_1^0, \dots, S_n^0, I_n^0, R_n^0)$ cho bởi

$$\mathbf{P}_0 = \left(\underbrace{\left(\frac{\mu + \omega}{\mu + \omega + \mathbf{u}_1}, 0, \frac{\mathbf{u}_1}{\mu + \omega + \mathbf{u}_1}, \dots, \frac{\mu + \omega}{\mu + \omega + \mathbf{u}_n}, 0, \frac{\mathbf{u}_n}{\mu + \omega + \mathbf{u}_n} \right)}_{3n} \right),$$

trong khi nếu tồn tại các phần mềm độc hại đang lan truyền trên mạng thì mô hình lan truyền mã độc đề xuất có ít nhất một trạng thái cân bằng đặc hữu $\mathbf{P}_* = (S_1^*, I_1^*, R_1^*, \dots, S_n^*, I_n^*, R_n^*)$ với một số điều kiện nhất định liên quan đến chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 .

Theo phương pháp ma trận thế hệ tiếp theo, chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 cho bởi

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\sigma(\mu + \omega)}{(\mu + r) \langle k \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 \mathbb{P}(k)}{(\mu + \omega + \mathbf{u}_k)} = \frac{\sigma(\mu + \omega) \langle k^2 \mathbf{u} \rangle}{(\mu + r) \langle k \rangle}, \quad (4.3)$$

trong đó $\langle k^2 \mathbf{u} \rangle = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 \mathbb{P}(k)}{(\mu + \omega + \mathbf{u}_k)}$.

Định lý 4.2. Nếu $\mathfrak{R}_0 > 1$ thì mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng luôn có ít nhất một trạng thái cân bằng đặc hữu $\mathbf{P}_* = (S_1^*, I_1^*, R_1^*, \dots, S_n^*, I_n^*, R_n^*)$ xác định bởi

$$S_k^* = \frac{1}{\sigma_k \Theta^*} \left(\mu + \frac{r}{1 + \gamma \Theta^*} \right) I_k^*, \quad R_k^* = \frac{1}{\mu + \omega} \left[\frac{r}{1 + \gamma \Theta^*} + \frac{\mathbf{u}_k}{\sigma_k \Theta^*} \left(\mu + \frac{r}{1 + \gamma \Theta^*} \right) \right] I_k^*,$$

$$I_k^* = \frac{\sigma_k \Theta^*}{\left\{ \mu + \frac{r}{1 + \gamma \Theta^*} + \sigma_k \Theta^* + \frac{\sigma_k \Theta^*}{\mu + \omega} \left[\frac{r}{1 + \gamma \Theta^*} + \frac{\mathbf{u}_k}{\sigma_k \Theta^*} \left(\mu + \frac{r}{1 + \gamma \Theta^*} \right) \right] \right\}}.$$

4.2.3. Dáng điệu tiệm cận của điểm cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0

Định lý 4.3. Các mệnh đề sau đây đúng:

(i) Nếu $\mathfrak{R}_0 > 1$ thì trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 không ổn định.

(ii) Nếu $\mathfrak{R}_0 < 1$ thì trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 ổn định tiệm cận địa phương.

Định lý 4.4. Đặt $\tilde{\mathfrak{R}}_0 = \frac{\sigma(\mu + \omega) \langle k^2 \mathbf{u} \rangle}{\mu \langle k \rangle}$. Khi đó, nếu giá trị ngưỡng $\tilde{\mathfrak{R}}_0 < 1$ thì trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 ổn định tiệm cận toàn cục.

Nhận xét 4.1. Dễ thấy rằng $\mathfrak{R}_0 < \tilde{\mathfrak{R}}_0$, tức là $\mathfrak{R}_0 < 1$ không đủ để đảm bảo cho tính hút toàn cục của trạng thái cân bằng \mathbf{P}_0 và trong trường hợp này, chúng ta không thể loại bỏ các cuộc tấn công của phần mềm độc hại trừ khi giá trị của \mathfrak{R}_0 giảm sao cho $\mathfrak{R}_0 < \tilde{\mathfrak{R}}_0 < 1$.

4.2.4. Tính rẽ nhánh ngược

Sau đây, luận án sẽ thiết lập điều kiện đủ để hiện tượng rẽ nhánh ngược tại $\mathfrak{R}_0 = 1$ xảy ra.

Định lý 4.5. Mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển diễn ra hiện tượng rẽ nhánh ngược tại $\mathfrak{R}_0 = 1$ nếu

$$\gamma > \frac{(\mu + r) \langle k^3 a \rangle \langle k \rangle}{r \langle k^2 u \rangle} \left(1 + \frac{r}{\mu + \omega} \right),$$

trong đó $\langle k^3 a \rangle = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{k^3 \mathbb{P}(k)}{\mu + \omega + \mathbf{u}_k}$.

4.3. Bài toán ổn định hóa cách ly cho mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển

Luận án xét kịch bản khi $\mathfrak{R}_0 > 1$, tức là trạng thái cân bằng \mathbf{P}_0 không ổn định và xây dựng hàm điều khiển cách ly $\mathbf{u}(t)$ để ổn định hóa trạng thái cân bằng này, tức là chuyển trạng thái của mô hình lan truyền mã độc về trạng thái $\tilde{\mathbf{P}}_0 = \underbrace{(1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots, 1, 0, 0)}_{3n}$. Ký hiệu

$$\tilde{\mathbf{e}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{P}}_0 = \underbrace{(S_1 - 1, I_1, R_1, S_2 - 1, I_2, R_2, \dots, S_n - 1, I_n, R_n)}_{3n}.$$

Khi đó, bài toán ổn định hóa đang xét tương đương với bài toán ổn định hóa vectơ $\mathbf{e}(t)$ về vectơ $\mathbf{0}$. Tiếp theo, luận án sẽ sử dụng hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết để xây dựng hàm điều khiển $\mathbf{u}(t)$. Do $\Lambda = \mu$, tức là $N_i(t)$ không đổi nên bằng phép thế $S_i = 1 - I_i - R_i$, ta chỉ cần xét động lực theo I_i và R_i . Mặt khác, do $S_i(t) > 0$ và bị chặn bởi 1 và nhóm thứ i nhận được tỷ lệ tham gia của nút mới là Λ nên có thể giả định rằng $S_i(t) \in [0.1, 0.9]$ với mọi $t > 0$ và kéo theo $I_i(t) + R_i(t) \in [0.1, 0.9]$. Khi đó, hệ phi tuyến đang xét có thể viết lại như sau:

$${}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) = \begin{pmatrix} -\mu - \frac{r}{1+\gamma\Theta(t)} + \frac{\sigma_i i \mathbb{P}^{(i)}(S_i(t)-1)}{\langle k \rangle} & 0 \\ \frac{r}{1+\gamma\Theta(t)} & -(\mu + \omega) \end{pmatrix} \mathbf{e}_i(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ S_i(t) - 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \begin{pmatrix} \frac{\sigma_i(S_i(t)-1)}{\langle k \rangle} j \mathbb{P}^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_j(t). \quad (4.4)$$

Ký hiệu $\mathbf{z}_i(t) = (z_{i1}(t) \ z_{i2}(t) \ \dots \ z_{iq}(t))^\top$ là vectơ biến tiền đề. Luận án thiết lập một hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết cho hệ phi tuyến (4.4) với các luật mờ như sau:

Luật \mathbf{E}_i^p : Nếu z_{i1} thuộc F_{i1}^p và z_{i2} thuộc F_{i2}^p và \dots và z_{iq} thuộc F_{iq}^p thì

$${}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) = A_i^p \mathbf{e}_i(t) + B_i^p \mathbf{u}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_{ij}^p \mathbf{e}_j(t),$$

trong đó A_i^p , B_i^p và α_{ij}^p là các ma trận thực với mọi $i = \overline{1, n}$ và $p = \overline{1, r_i}$. Hệ phi tuyến (4.4) có thể được đặc trưng bởi phương trình vi phân phân thứ sau đây:

$${}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) = \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) \left\{ A_i^p \mathbf{e}_i(t) + B_i^p \mathbf{u}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_{ij}^p \mathbf{e}_j(t) \right\} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (4.5)$$

ở đó $w_i^p(\mathbf{z}_i(t))$ là hàm thuộc cho biết mức độ kích hoạt của mô hình địa phương thứ p của hệ \mathbf{E}_i . Do đó, hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết cho mô hình lan truyền mã độc đề xuất cho bởi:

$${}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}(t) = \begin{pmatrix} \sum_{p=1}^{r_1} w_1^p(\mathbf{z}_1(t)) \left\{ A_1^p \mathbf{e}_1(t) + B_1^p \mathbf{u}_1(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_{1j}^p \mathbf{e}_j(t) \right\} \\ \vdots \\ \sum_{p=1}^{r_n} w_n^p(\mathbf{z}_n(t)) \left\{ A_n^p \mathbf{e}_n(t) + B_n^p \mathbf{u}_n(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_{nj}^p \mathbf{e}_j(t) \right\} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Luật mờ thứ p của điều khiển mờ trong hệ con \mathbf{E}_i có thể xét dưới dạng sau:

Luật \mathbf{E}_i^p : Nếu z_{i1} thuộc F_{i1}^p và z_{i2} thuộc F_{i2}^p và \dots và z_{iq} thuộc F_{iq}^p thì $\mathbf{u}_i(t) = K_i^p \mathbf{x}_i(t)$.

Điều khiển phản hồi trạng thái $\mathbf{u}_i(t)$ cho hệ con \mathbf{E}_i là $\mathbf{u}_i(t) = \sum_{p=1}^{r_i} w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) K_i^p \mathbf{x}_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$).

Ký hiệu $\mathbf{u}(t) = (\mathbf{u}_1(t) \ \dots \ \mathbf{u}_n(t))^\top$ là điều khiển phản hồi trạng thái cho mô hình lan truyền mã độc đề xuất. Sau đây, luận án thiết lập điều kiện để $\mathbf{u}(t)$ ổn định hóa trạng thái cân bằng không dịch:

Định lý 4.6. Giả sử rằng tồn tại các ma trận $P_i \in \mathbf{S}_{++}^n$, $Q_i \succ 0$, $U_i^{pm}, U_{ij}^{pm} \in \mathbf{S}^n$ và các ma trận K_i^p thỏa mãn các bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau:

$$Q_i^{pm} \preceq U_i^{pm} \quad (\text{LMI.1})$$

$$(\alpha_{ij}^p)^\top P_i + P_i \alpha_{ij}^p + (\alpha_{ji}^m)^\top P_j + P_j \alpha_{ji}^m \preceq 2U_{ij}^{pm} \quad (\text{LMI.2})$$

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} U_1 & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ U_{12}^\top & U_2 & \dots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{1n}^\top & U_{2n}^\top & \dots & U_n \end{pmatrix} \prec 0, \quad (\text{LMI.3})$$

trong đó với mỗi $i, j = \overline{1, n}$, các ma trận U_i và U_{ij} ($i \neq j$) được cho bởi

$$U_i = \begin{pmatrix} U_i^{11} & U_i^{12} & \dots & U_i^{1r_i} \\ (U_i^{12})^\top & U_i^{22} & \dots & U_i^{2r_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (U_i^{1r_i})^\top & (U_i^{2r_i})^\top & \dots & U_i^{r_i r_i} \end{pmatrix}, \quad U_{ij} = \begin{pmatrix} U_{ij}^{11} & U_{ij}^{12} & \dots & U_{ij}^{1r_j} \\ U_{ij}^{21} & U_{ij}^{22} & \dots & U_{ij}^{2r_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{ij}^{r_i 1} & U_{ij}^{r_i 2} & \dots & U_{ij}^{r_i r_j} \end{pmatrix}.$$

Khi đó, hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết (4.6) ổn định hóa được với điều khiển phản hồi trạng thái mờ $\mathbf{u}(t)$, trong đó

$$Q_i^{pm} = (G_i^{pm})^\top P_i + P_i G_i^{pm} \quad \text{và} \quad G_i^{pm} = A_i^p + B_i^p K_i^m.$$

Nhận xét 4.2. Để áp dụng chương trình MatLab để giải hệ điều kiện trong Định lý 4.6, NCS sẽ áp dụng định lý phần bù Schur để biến đổi các bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMI.1), (LMI.2) và (LMI.3) thành các bất đẳng thức ma trận tuyến tính ở dạng thuận tiện cho giải số hơn. Với mục tiêu này, NCS thực hiện các phép biến đổi sau:

$$C_i = P_i^{-1}, \quad K_i^p = W_i^p C_i^{-1}, \quad \tilde{U}_i^{pm} = C_i U_i^{pm} C_i, \quad \tilde{U}_{ij}^{pm} = C_i U_{ij}^{pm} C_j + C_j U_{ij}^{pm} C_i$$

và $\tilde{Q}_i^{pm} = C_i \left\{ (G_i^{pm})^\top P_i + P_i G_i^{pm} \right\} C_i = C_i (A_i^p)^\top + A_i^p C_i + B_i^p W_i^m + (W_i^m)^\top (B_i^p)^\top$. Bằng cách

nhân bên trái và bên phải của các ma trận U_i, U_{ij} với $\text{diag}[C_i, \dots, C_i]$, chúng ta thu được

$$\tilde{U}_i = \begin{pmatrix} \tilde{U}_i^{11} & \tilde{U}_i^{12} & \cdots & \tilde{U}_i^{1r_i} \\ (\tilde{U}_i^{12})^\top & \tilde{U}_i^{22} & \cdots & \tilde{U}_i^{2r_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\tilde{U}_i^{1r_i})^\top & (\tilde{U}_i^{2r_i})^\top & \cdots & \tilde{U}_i^{r_i r_i} \end{pmatrix}, \quad \tilde{U}_{ij} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_{ij}^{11} & \tilde{U}_{ij}^{12} & \cdots & \tilde{U}_{ij}^{1r_j} \\ \tilde{U}_{ij}^{21} & \tilde{U}_{ij}^{22} & \cdots & \tilde{U}_{ij}^{2r_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{U}_{ij}^{r_i 1} & \tilde{U}_{ij}^{r_i 2} & \cdots & \tilde{U}_{ij}^{r_i r_j} \end{pmatrix}.$$

Do đó, chúng ta có thể viết lại hệ bất đẳng thức ma trận của Định lý 4.6 như sau:

$$\tilde{Q}_i^{pm} \preceq \tilde{U}_i^{pm} \quad (\text{LMI.4})$$

$$(\alpha_{ij}^p)^\top C_i + C_i \alpha_{ij}^p + (\alpha_{ji}^m)^\top C_j + C_j \alpha_{ji}^m \preceq 2\tilde{U}_{ij}^{pm} \quad (\text{LMI.5})$$

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 & \tilde{U}_{12} & \cdots & \tilde{U}_{1n} \\ \tilde{U}_{12}^\top & \tilde{U}_2 & \cdots & \tilde{U}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{U}_{1n}^\top & \tilde{U}_{2n}^\top & \cdots & \tilde{U}_n \end{pmatrix} \prec 0. \quad (\text{LMI.6})$$

Ví dụ 4.1. Xét mạng cảm biến không dây với cấu trúc mạng quy mô tự do Barabási-Albert với $n = 2$ và các tham số cho bởi $\Lambda = \mu = 0.14, \omega = 0.1, \sigma = 0.8, r = 0.6, \gamma = 2$. Từ đó, ta tính được $\langle k \rangle = \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(k) = \frac{10}{9}, \langle k^2 \rangle = \sum_{k=1}^n k^2\mathbb{P}(k) = \frac{4}{3}$ và $\mathfrak{R}_0 = 1.8018 > 1$. Bằng cách chọn các số hạng $z_{i1} = S_i(t)$ và $z_{i2} = \frac{r}{1+\gamma\Theta(t)}$ trong hệ (4.4) làm biến tiền đề, luận án thiết lập hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết tương ứng với mô hình lan truyền mã độc đề xuất với các hàm trọng tương ứng là $\eta_{i0}^1(z_{i1}) = \frac{1-z_{i1}}{0.8}, \eta_{i1}^1(z_{i1}) = \frac{z_{i1}-0.2}{0.8}$ cho biến z_{i1} và $\eta_{i0}^2(z_{i2}) = \frac{5(1-z_{i2})}{2}, \eta_{i1}^2(z_{i2}) = \frac{5z_{i2}-3}{2}$ cho biến z_{i2} . Ký hiệu $\mathbf{z}_i(t) = (z_{i1}(t) \ z_{i2}(t))^\top$ và các tập mờ tương ứng với các hàm trọng bởi F_{ik}^χ với mỗi $i = 1, 2, k = 0, 1$ và $\chi = 1, 2$. Ta nhận được hệ mờ Takagi-Sugeno sau:

Luật \mathbf{E}_i^1 : Nếu z_{i1} thuộc F_{i0}^1 và z_{i2} thuộc F_{i0}^2 thì ${}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) = A_i^1 \mathbf{e}_i(t) + B_i^1 \mathbf{u}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \alpha_{ij}^1 \mathbf{e}_j(t)$,

Luật \mathbf{E}_i^2 : Nếu z_{i1} thuộc F_{i1}^1 và z_{i2} thuộc F_{i1}^2 thì ${}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) = A_i^2 \mathbf{e}_i(t) + B_i^2 \mathbf{u}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \alpha_{ij}^2 \mathbf{e}_j(t)$,

Luật \mathbf{E}_i^3 : Nếu z_{i1} thuộc F_{i1}^1 và z_{i2} thuộc F_{i0}^2 thì ${}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) = A_i^3 \mathbf{e}_i(t) + B_i^3 \mathbf{u}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \alpha_{ij}^3 \mathbf{e}_j(t)$,

Luật \mathbf{E}_i^4 : Nếu z_{i1} thuộc F_{i0}^1 và z_{i2} thuộc F_{i1}^2 thì ${}_0^C \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) = A_i^4 \mathbf{e}_i(t) + B_i^4 \mathbf{u}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \alpha_{ij}^4 \mathbf{e}_j(t)$,

trong đó với mọi $i, j = 1, 2$ và $p = \overline{1, 4}$, các ma trận A_i^p, B_i^p và α_{ij}^p cho bởi

$$A_1^1 = \begin{pmatrix} -0.916 & 0 \\ 0.2 & -0.24 \end{pmatrix}, A_1^2 = \begin{pmatrix} -1.316 & 0 \\ 0.6 & -0.24 \end{pmatrix}, A_1^3 = \begin{pmatrix} -0.404 & 0 \\ 0.2 & -0.24 \end{pmatrix}, A_1^4 = \begin{pmatrix} -0.804 & 0 \\ 0.6 & -0.24 \end{pmatrix},$$

$$A_2^1 = \begin{pmatrix} -0.628 & 0 \\ 0.2 & -0.24 \end{pmatrix}, A_2^2 = \begin{pmatrix} -1.028 & 0 \\ 0.6 & -0.24 \end{pmatrix}, A_2^3 = \begin{pmatrix} -0.372 & 0 \\ 0.2 & -0.24 \end{pmatrix}, A_2^4 = \begin{pmatrix} -0.772 & 0 \\ 0.6 & -0.24 \end{pmatrix},$$

$$B_1^1 = B_1^2 = B_2^1 = B_2^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.9 \end{pmatrix}, B_1^3 = B_1^4 = B_2^3 = B_2^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_{12}^1 = \alpha_{12}^2 = \begin{pmatrix} -0.144 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_{12}^3 = \alpha_{12}^4 = \begin{pmatrix} -0.016 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_{21}^1 = \alpha_{21}^2 = \begin{pmatrix} -1.152 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_{21}^3 = \alpha_{21}^4 = \begin{pmatrix} -0.128 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Khi đó, hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết (4.5) được viết lại như sau:

$${}^C_0 \mathfrak{D}_t^\beta \mathbf{e}_i(t) = \sum_{p=1}^4 w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) \left\{ A_i^p \mathbf{e}_i(t) + B_i^p \mathbf{u}_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \alpha_{ij}^p \mathbf{e}_j(t) \right\},$$

trong đó $i = 1, 2$ và $w_i^p(\mathbf{z}_i(t)) = \varphi_i^p(\mathbf{z}_i(t)) \left[\sum_{p=1}^4 \varphi_i^p(\mathbf{z}_i(t)) \right]^{-1}$, $\varphi_i^p(\mathbf{z}_i(t)) = \eta_{ik}^1 \eta_{ij}^2$. Sử dụng Matlab cho (LMI.4), (LMI.5) và (LMI.6), ta thu được ¹:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 21.8174 & 1.3860 \\ 1.3860 & 92.7029 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 18.5841 & 1.0680 \\ 1.0680 & 91.7758 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 0.0459 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0108 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0.0538 & -0.0006 \\ -0.0006 & 0.0109 \end{pmatrix},$$

$$K_1^1 = \begin{pmatrix} 0.1067 & 0.2151 \end{pmatrix}, K_1^2 = \begin{pmatrix} 0.2983 & 0.0581 \end{pmatrix}, K_1^3 = \begin{pmatrix} 0.3112 & -0.0300 \end{pmatrix}, K_1^4 = \begin{pmatrix} 0.3358 & -0.0330 \end{pmatrix}$$

$$K_2^1 = \begin{pmatrix} 0.0605 & 0.2203 \end{pmatrix}, K_2^2 = \begin{pmatrix} 0.2944 & 0.0617 \end{pmatrix}, K_2^3 = \begin{pmatrix} 0.3172 & -0.0280 \end{pmatrix}, K_2^4 = \begin{pmatrix} 0.3598 & -0.0315 \end{pmatrix}.$$

Do đó, trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 của mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng ổn định hóa được.

¹File chứa code MATLAB có thể tải xuống tại đường link URL: <https://github.com/DongNP16/TS-fuzzy-system.git>

KẾT LUẬN CHUNG

1. Các kết quả đạt được của luận án

Luận án này nghiên cứu bài toán mô hình hóa sự lan truyền của các phần mềm độc hại dựa trên các mô hình phương trình vi phân phân thứ và lý thuyết tập mờ. Các kết quả đạt được trong luận án bao gồm:

- (i) Thiết lập mô hình lan truyền mã độc SIQR phân thứ với dữ liệu mờ sử dụng các khái niệm đạo hàm Caputo-Atangana-Baleanu phân thứ mờ (Định nghĩa 2.1) và tích phân Riemann-Liouville Atangana-Baleanu phân thứ mờ (Định nghĩa 2.2), chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm tích phân mờ của mô hình (Định lý 2.3 và Định lý 2.4) và thực hiện một số mô phỏng số.
- (ii) Thiết lập mô hình lan truyền mã độc SE_1E_2IQR phân thứ dựa trên mạng với hàm lan truyền xác định bởi các luật mờ và chứng minh một số tính chất định tính của mô hình này như tính dương của nghiệm, chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 (Công thức (3.4)), sự ổn định tiệm cận của trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 (Định lý 3.3 và Định lý 3.4) và tính rẽ nhánh tiến tại $\mathfrak{R}_0 = 1$ (Định lý 3.5).
- (iii) Thiết lập mô hình lan truyền mã độc SIRS phân thứ dựa trên mạng có điều khiển với hàm xử lý mã độc bão hòa và bài toán ổn định hóa cho mô hình này dựa trên hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết với các kết quả đạt được gồm tính dương của nghiệm, chỉ số ngưỡng lan truyền \mathfrak{R}_0 (Công thức (4.3)), tính ổn định tiệm cận (Định lý 4.3 và Định lý 4.4), tính rẽ nhánh lùi tại $\mathfrak{R}_0 = 1$ (Định lý 4.5) và một số điều kiện đủ dạng bất đẳng thức ma trận cho tính ổn định hóa (Định lý 4.6) của trạng thái cân bằng không có mã độc \mathbf{P}_0 .

2. Một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

- Thiết lập các nghiên cứu sâu hơn về đặc trưng dịch tễ của các mô hình lan truyền mã độc chứa yếu tố bất định dựa trên cách tiếp cận số mờ tương quan tuyến tính, số mờ biểu diễn dạng granular, số Z.
- Xây dựng bài toán quan sát và điều khiển đảm bảo ngưỡng cho các mô hình lan truyền mã độc phân thứ dựa trên mạng dựa trên cách tiếp cận hệ mờ Takagi-Sugeno phân thứ liên kết với yếu tố trễ hay yếu tố bất định.

DANH MỤC CÁC BÀI BÁO LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

- P1.** N.P. Dong, H.V. Long, N.L. Giang, 2022, The fuzzy fractional SIQR model of computer virus propagation in wireless sensor network using Caputo Atangana–Baleanu derivatives, *Fuzzy Sets and Systems*, 429, pp. 28-59. **(SCIE-Q1)**
- P2.** N.P. Dong, H.V. Long, N.T.K. Son, 2022, The dynamical behaviors of fractional-order SE_1E_2IQR epidemic model for malware propagation on Wireless Sensor Network, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 111, 106428. **(SCIE-Q1)**
- P3.** N.P. Dong, H.V. Long, N.T.K. Son, 2023, The analysis of a fractional network-based epidemic model with saturated treatment function and fuzzy transmission, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 20(1), pp. 1-18. **(SCIE-Q2)**
- P4.** N.P. Dong, N.L. Giang, H.V. Long, 2023, Interconnected Takagi-Sugeno intelligent system and fractional SIRS epidemic model for stabilization of Wireless Sensor Networks. **(đã gửi đăng)**